evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost | Gymnázium Kladno

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

CZ 1.07/1.1.32/02.0006

KA01 - Prohlubující semináře nad rámec výuky
Kondiční matematika
Prohlubující seminář 2 – Základní typy důkazů
Termín konání: 23. 10. 2013
Učitel: Marie Sojková
Typ výstupu: test

Závěrečný test

1. Důkaz přímý a nepřímý

Dokažte, že $\forall n \in \mathbf{N}$ platí:

1) $2 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid n^3$
2) $non(\ 3 \mid (n^2+2)\ ) \Rightarrow 3 \mid n$

2. Důkaz sporem

Dokažte, že číslo $\log 5$ je iracionální

3. Důkazy vět o dělitelnosti

Dokažte, že $\forall n \in \mathbf{N}$ platí:

1) $3 \mid (n^3 - n)$
2) $4 \mid (n^4 + 3n^2)$

4. Důkaz matematickou indukcí

Dokažte, že $\forall n \in \mathbf{N}$ platí: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$

5. Výroky

Zapište slovy, vyslovte obměnu a negaci výroku a dokažte:

$$\forall n \in N; non\left(3 / \left(2n^3 + n\right)\right) \Rightarrow 3/n$$

Řešení

1. $\left(2/n \Rightarrow 2/n^3\right) \wedge \left(2/n^3 \Rightarrow 2/n\right)$
   $1.část: 2/n \Rightarrow n = 2k, k \in N \Rightarrow n^3 = 8k^3 = 2.4k^3 = 2.l, l \in N \Rightarrow 2/n^3$
   $2.část: non(2/n) \Rightarrow non(2/n^3)$
   $non(2/n) \Rightarrow n = 2k+1, k \in N \Rightarrow n^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 =$
   $= 2\left(4k^3 + 6k^2 + 3k\right) + 1 = 2l + 1 \Rightarrow non(2/n^3)$

---

2. Dokazuji obměnu:
   $non(3/n) \Rightarrow \left(3/\left(n^2+2\right)\right)$
   $non(3/n) \Rightarrow n = 3k+1 \vee n = 3k+2 \Rightarrow n^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 \vee n^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 \Rightarrow vytknu 3$

---

3. Vyjdu z negace daného výroku: „log 5 je racionální číslo“ a dojdu ke sporu

$\log 5 \in Q \Rightarrow \exists p, q \in N; \log 5 = \dfrac{p}{q} \Rightarrow 5 = 10^{\frac{p}{q}} \Rightarrow 5^p = 10^q \Rightarrow spor: 10^q$ končí 0 vždy, ale 5^p ne, končí 5.

---

4. $3 \mid \left(n^3 - n\right)$

Vzhledem k dělitelnosti 3 rozebereme všechny možnosti pro n: $n = 3k \vee n = 3k+1 \vee n = 3k+2, k \in N$

Např. $n = 3k+1, k \in N \Rightarrow \left(n^3 - n\right) = 27k^3 + 27k^2 + 6k = 3\left(9k^3 + \ldots\right)$ tedy je dělitelný 3

---

5. $4 \mid \left(n^4 + 3n^2\right) \qquad \left(n^4 + 3n^2 = n^2\left(n^2+3\right)\right)$

Dokazujeme jako předchozí nebo sporem a rozdělíme n na sudé a liché.

---

6. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$

1. krok: n=1 $\qquad 1 = \dfrac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2$ platí

2. indukční
krok

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2$$

$$L(n+1) = L(n) + (n+1)^3 = P(n) + (n+1)^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4} \cdot \cdot (n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) = P(n+1)$$

---

7. Pro každé n přirozené platí, když $(2n^3 + n)$ není dělitelné třemi, potom n je třemi dělitelné.

Obměna: Pro každé n přirozené platí, když n není dělitelné třemi, potom $(2n^3 + n)$ je třemi dělitelné.

Negace: Existuje n přirozené pro které $(2n^3 + n)$ není dělitelné třemi a n také není třemi dělitelné.

Zdroje:

Vlastní zdroje autorky (M. Sojková)

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

VEJSADA, František a TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky: pro SVVŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969. ISBN 95-10-43.